

Upravljanje neholonomskim mobilnim robotima s diferencijalnim pogonom

Toni Petrinčić

HEP-ODS d.o.o., Elektroprimorje Rijeka, Pogon Cres-Lošinj,
Kalvarija bb, Mali Lošinj, Hrvatska
E-mail: toni.petrinic@gmail.com

Sažetak - U ovome su radu opisani kinematički i dinamički modeli neholonomskih mobilnih robota s diferencijalnim pogonom i predložen je algoritam upravljanja njihovim gibanjem koji osigurava slijeđenje zadane putanje s minimalnim utroškom energije. Razvijeni dinamički model provjeren je simulacijama na primjeru mobilnog robota Pioneer 3DX tvrtke MobileRobotics Inc. Predloženi algoritam upravljanja provjeren je simulacijama u MATLAB®-u.

Ključne riječi - mobilni roboti, kinematički model, neholonomsko ograničenje, dinamički model, slijeđenje putanje, optimalno upravljanje

1. Uvod

Razvojem sustava za autonomnu navigaciju mobilnih robota (MR-a) u nestrukturiranim prostorima otvaraju se potpuno nove primjene robota i izvan industrijskih proizvodnih pogona. Jedan od osnovnih modula navigacijskog sustava jest modul upravljanja gibanjem robota, kojemu je zadaća ostvarenje zadanih vrijednosti linearne i kutne brzine robota, odnosno praćenje trajektorije gibanja dobivene od modula planiranja gibanja.

Razne primjene MR-a zahtijevaju i razne mehaničke konstrukcije te razne konfiguracije lokomocijskog mehanizma. Svaka konfiguracija unosi neke specifičnosti koje utječu na njegovu upravljivost i mobilnost. Sa stajališta upravljivosti i mobilnosti, mobilni se roboti u osnovi mogu razvrstati u holonomske i neholonomske robote.

Holonomski MR-i odlikuju se mogućnošću neovisnog mijenjanja svih triju varijabli položaja u konfiguracijskom prostoru robota (geometrijske koordinate pozicije u dvodimenzionalnom prostoru (x, y) i orijentacija robota Θ), a neholonomski MR-i zbog nemogućnosti neovisnog mijenjanja varijabli položaja moraju izvoditi specifične, često složene, putanje radi promjene položaja u konfiguracijskom prostoru. Zbog visoke cijene holonomskih konfiguracija, puno se češće koriste neholonomske konfiguracije. Najzastupljenije neholonomske konfiguracije MR-a su s Ackermanovim pogonom (automobili), diferencijalnim pogonom i sinkronim pogonom.

Strukture upravljanja robotima za praćenje referentne putanje uglavnom se zasnivaju na upotrebi linearne i nelinearne povratne veze odnosno

dinamičke linearizacije preko povratne veze [1]. Naprednija struktura upravljanja zasnovana na modelskom prediktivnom upravljanju dana je u [2]. Niti jedna od navedenih metoda ne uzima u obzir utrošenu energiju. U [3] je dana opća teorija optimalnog upravljanja afnim nelinearnim sustavima s pretpostavkom nilpotentnosti pridružene Liejeve algebre. Struktura upravljanja MR-om s diferencijalnim pogonom zasnovana na dinamičkom modelu robota i minimalnom utrošku energije (disipirana energija armaturnog kruga + energija utrošena na svladavanje viskoznog trenja + kinetička energija robota) dana je u [4].

Rad je organiziran na slijedeći način. U drugom poglavlju razvijen je kinematički model MR-a s diferencijalnim pogonom. U istom poglavlju utjecaj neholonomskog ograničenja prikazan je na primjeru bočnog parkiranja robota s diferencijalnim pogonom. U trećem poglavlju izvodi se dinamički model MR-a s diferencijalnim pogonom i provjerava eksperimentalno na primjeru MR-a Pioneer 3DX tvrtke MobileRobots Inc. U četvrtom poglavlju prezentiran je algoritam za praćenje putanje zasnovan na kinematičkom modelu robota i zadanom kriteriju optimalnosti. Peto poglavlje zaključuje rad i daje smjernice za budući rad.

2. Kinematički model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom

Kinematički model MR-a je matematički model kojim se opisuje gibanje MR-a bez promatranja vanjskih sila koje prouzrokuju gibanje. Drugim riječima, kinematika proučava geometrijske aspekte gibanja.

Kinematički model MR-a vezan je za određivanje njegova trenutnog položaja na osnovi poznatog početnog položaja i izmjerene promjene položaja. U slučaju MR-a s diferencijalnim pogonom, za definiranje položaja uzima se središnja točka između pogonskih kotača kao što je to prikazano na slici 1. Pozicija (x, y) definira se prema spomenutoj točki u odnosu na ishodište globalnog koordinatnog sustava, a orijentacija Θ u odnosu na pozitivnu x-poluos, pri čemu je pozitivan smjer orijentacije suprotan smjeru kazaljke na satu. Kako MR-i s diferencijalnim pogonom imaju dva nezavisno upravljiva pogonska kotača koji se ne mogu zakretati, njihovim gibanjem se upravlja na način da se pogonskim kotačima zadaju različite referentne veličine brzine vrtnje. Ako se npr. lijevi pogonski kotač vrti brže od desnog, MR skreće u desno i obrnuto. Pomoćni pogonski kotači služe samo za održavanje stabilnosti MR-a i njihov utjecaj se ovdje može zanemariti. Gibanje MR-a može se podijeliti na dvije komponente, translacijsku i rotacijsku. U tom se slučaju kinematika takvog MR-a može opisati sljedećim izrazima:

$$v(t) = \frac{v_L(t) + v_R(t)}{2} = \frac{\omega_L(t)R_L + \omega_R(t)R_R}{2}, \quad (1)$$

$$\omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{b} = \frac{-\omega_L(t)R_L + \omega_R(t)R_R}{b}, \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos(\Theta(t)), \quad (3)$$

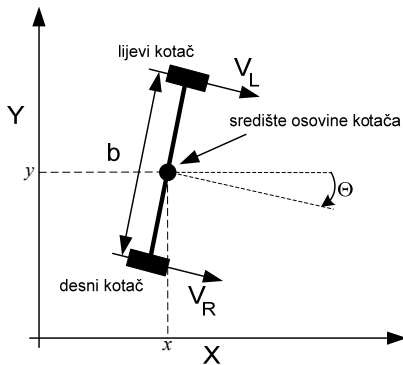
$$\dot{y}(t) = v(t) \sin(\Theta(t)), \quad (4)$$

$$\dot{\Theta}(t) = \omega(t), \quad (5)$$

gdje su:

- $\omega_L(t)$ i $\omega_R(t)$ - kutne brzine lijevog i desnog pogonskog kotača [rad/s],

- $v_L(t)$ i $v_R(t)$ - obodne brzine lijevog i desnog pogonskog kotača [m/s],



Slika 1. Kinematika MR-a s diferencijalnim pogonom

- $v(t)$ - translacijska brzina robota [m/s],
- $\omega(t)$ - rotacijska brzina robota [rad/s],
- R_L i R_R - polumjeri lijevog i desnog pogonskog kotača [m],
- b - duljina osovine kotača [m],
- $\dot{q}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{\Theta}(t)]^T$ - vektor brzina robota u trenutku t ,
- $q(t) = [x(t), y(t), \Theta(t)]^T$ - vektor položaja robota u trenutku t .

2.1. Neholonomska ograničenja mehaničkih sustava

Pojam ograničenja mehaničkih sustava odnosi se na postojanje algebarskih i diferencijalnih veza među pojedinim koordinatama sustava. Pretpostavimo da je stanje mehaničkog sustava potpuno opisano sa skupom poopćenih koordinata $\{q_1, \dots, q_n\}$. n -dimenzionalni prostor kojeg razapinjaju nezavisne koordinate $\{q_1, \dots, q_n\}$ nazivamo konfiguracijskim prostorom i označavamo sa Q odnosno \mathbb{R}^n . Broj nezavisnih parametara tj. poopćenih koordinata predstavlja broj stupnjeva slobode mehaničkog sustava (engl. *Degree Of Freedom*, DOF).

Sustavi čiji uvjeti na gibanje, osim o položajima q ovise i o brzinama sustava \dot{q} i koji se mogu zapisati u obliku

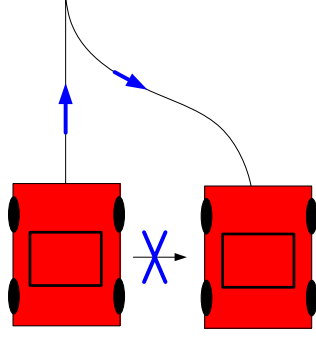
$$a_i(q, \dot{q}) = 0 \quad i = 1, \dots, k, \quad (6)$$

nazivaju se *neholonomskim sustavima* [5]. U većini slučajeva ograničenja su *Pfaffian* oblika,

$$a_i^T(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k \Rightarrow A^T(q) \cdot \dot{q} = 0, \quad (7)$$

to jest linearna su u brzini, gdje je A^T matrica ograničenja dimenzije $k \times n$.

Neholonomska ograničenja (nazivaju se još i neintegrabilna) ne ograničavaju skup mogućih stanja mehaničkog sustava unutar konfiguracijskog prostora. Međutim, ako takva ograničenja u sustavu postoje, tada neke od koordinata sustava nije moguće neovisno mijenjati, tj. njihova promjena utječe na druge koordinate sustava. Drugim riječima, neholonomska ograničenja utječu na način prelaska iz jedne točke u drugu u konfiguracijskom prostoru (npr. bočno parkiranje automobila - vidi sliku 2.). Bitno je primijetiti da postojanje neholonomskih ograničenja ne smanjuje broj stupnjeva slobode sustava.



Slika 2. Problem bočnog parkiranja automobila zbog neholonomskih ograničenja

Teorija neholonomskih sustava ograničena je na određenu skupinu nelinearnih sustava. Tehnike analize neholonomskih sustava koriste ideje iz linearne algebre. U daljnjim se razmatranjima ograničavamo na nelinearni sustav oblika:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m g_i(q)u_i \quad (8)$$

gdje su $q \in \mathfrak{R}^n$ vektor stanja, $u \in \mathfrak{R}^m$ upravljačka varijabla i $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ vektorsko polje u \mathfrak{R}^n .

Prije daljnje analize uvodimo pojam distribucije i Liejeve zagrada. Grupa linearno nezavisnih vektora g_i iz (8) sačinjava *distribuciju* Δ koja se može promatrati kao vektorski prostor:

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}. \quad (9)$$

Općenito, za dane vektore u i v u \mathfrak{R}^n , možemo definirati treći vektor, nazvan *Liejeva zagrada* [6] i označen sa $[u, v]$, koji je također u \mathfrak{R}^n , prema relaciji;

$$[u, v] = Dv \cdot u - Du \cdot v, \quad (10)$$

gdje je Dv Jacobian vektora v , a Du Jacobian vektora u . Liejeva zagrada mora zadovoljiti slijedeće uvjete:

1. antikomutativnost:

$$[u, v] = -[v, u] \quad (\text{što je ekvivalentno s } [u, u] = 0), \quad (11)$$

2. Jacobijev identitet:

$$[u, [v, z]] + [v, [z, u]] + [z, [u, v]] = 0. \quad (12)$$

Viši redovi Liejevih zagrada definirani su kao:

$$\begin{aligned} (ad_u^1, v) &\equiv [u, v] \\ (ad_u^2, v) &\equiv [u, [u, v]] \\ \dots \\ (ad_u^k, v) &\equiv [u, (ad_u^{k-1}, v)] \end{aligned} \quad (13)$$

Liejeva zagrada može se iskoristiti za generiranje vektora koji su potencijalno izvan distribucije Δ . Distribuciju Δ nadopunjenu linearno-nezavisnim vektorima generiranim Liejevom zagradom (uključujući i više redove) označavamo sa $CLA(\Delta)$ (engl. *Control Lie Algebra*). Dva teorema izražavaju bitna svojstva neholonomskih sustava koristeći $CLA(\Delta)$.

Teorem 1 (Frobeniusov teorem, [6]): Sustav je integrabilan ako i samo ako su svi vektori dobiveni Liejevom zagradom sadržani u distribuciji Δ .

Drugim riječima, ako je $\dim(CLA(\Delta)) = \dim(\Delta)$, sustav je integrabilan odnosno holonomski. Važno je primijetiti da $\dim(CLA(\Delta))$ ne može nikada biti veća od n odnosno od dimenzije konfiguracijskog prostora.

Drugo važno svojstvo koje proizlazi iz $CLA(\Delta)$ jest test upravljivosti sustava. Označimo sa $R(q)$ skup svih dohvatljivih stanja iz q . Kažemo da je sustav *lokalno upravljiv* ako za sve $q \in \mathfrak{R}^n$, $R(q)$ sadrži otvoren skup koji sadrži q . Ovo podrazumijeva da bilo koje stanje sustava može biti dohvatljivo iz bilo kojeg drugog stanja. Označimo sa $R(q, \Delta t)$ skup svih stanja dohvatljivih u vremenu Δt . Za sustav kažemo da je *small-time* upravljiv ako za svaki $q \in \mathfrak{R}^n$ i bilo koji Δt , $R(q, \Delta t)$ sadrži otvoren skup koji sadrži q .

Teorem 2 (Chowov teorem, [6]): Sustav je *small-time* upravljiv ako i samo ako je $\dim(CLA(\Delta)) = n$.

2.2. Neholonomsko ograničenje mobilnog robota s diferencijalnim pogonom

Pretpostavimo li da nema klizanja, MR s diferencijalnim pogonom nema mogućnosti bočnog gibanja. Ipak, globalni je položaj robota neograničen, što će u nastavku biti obrazloženo.

Zapisom jednadžbi (3)-(5) u obliku (8) i uvrštenjem u (9) dobije se distribucija Δ za mobilni robot s diferencijalnim pogonom:

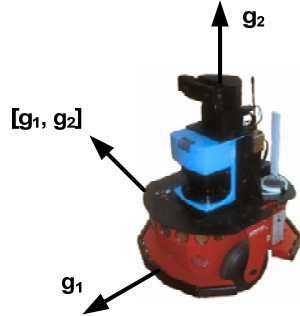
$$\Delta = \text{span}\{g_1, g_2\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (14)$$

Vektor $g_1(q)$ predstavlja linijsko gibanje robota u smjeru poprečnom na osovinu kotača, a vektor $g_2(q)$ zakretanje robota oko osi postavljene u točki središta osovine kotača i okomito na osovinu kotača.

Liejeva zagrada vektora g_1 i g_2 prema (10) je:

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2 = \begin{pmatrix} \sin \Theta \\ -\cos \Theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Liejeva zagrada zapravo predstavlja neholonomsko ograničenje gibanja robota s diferencijalnim pogonom tzv. *bočno gibanje* (vidi sliku 3.). Viši redovi Liejeve zagrade iščezavaju.



Slika 3. Liejeva zagrada $[g_1, g_2]$ za mobilni robot s diferencijalnim pogonom

Distribucija generirana vektorima dobivenim pomoću Liejeve zagrade $CLA(\Delta)$ je:

$$CLA(\Delta) = span\{g_1, g_2, g_3\} = span\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(\Theta) \\ -\cos(\Theta) \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (16)$$

Kako je $\dim(CLA(\Delta)) > \dim(\Delta)$, prema Frobeniusovu teoremu slijedi da je sustav neintegrabilan odnosno neholonomski. Budući da je $\dim(CLA(\Delta)) = 3 = n$, prema teoremu Chowa zaključujemo da je sustav *small-time* upravljiv.

2.3. Primjer utjecaja neholonomskog ograničenja

Pretpostavimo da dva upravljačka signala v i ω nisu nikada istodobno aktivni. Promotrimo slijedeći slijed upravljačkih signala [7] na vremenskom intervalu $[0, 4h]$ kojim ćemo ostvariti tzv. bočno parkiranje robota s diferencijalnim pogonom:

$$u(t) = (v, \omega) = \begin{cases} (1, 0) & \text{za } t \in [0, h] \\ (0, 1) & \text{za } t \in [h, 2h] \\ (-1, 0) & \text{za } t \in [2h, 3h] \\ (0, -1) & \text{za } t \in [3h, 4h] \end{cases}. \quad (17)$$

Slijed upravljačkih signala redom ostvaruje: gibanje unaprijed, rotacija unaprijed, gibanje unazad i rotacija unazad (vidi sliku 4. i 5.).

Na temelju poznatog kinematičkog modela može se izračunati položaj robota u trenutku $t = 4h$:

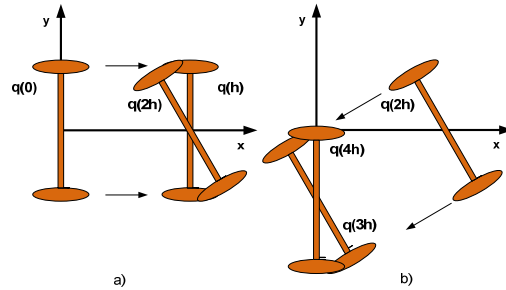
$$\begin{bmatrix} x(4h) \\ y(4h) \\ \Theta(4h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + h \cos \Theta_0 - h \cos(\Theta_0 + h) \\ y_0 + h \sin \Theta_0 - h \sin(\Theta_0 + h) \\ \Theta_0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Za jako mali h mogu se trigonometrijske funkcije aproksimirati Taylorovim polinomom prvog reda pa se dobije:

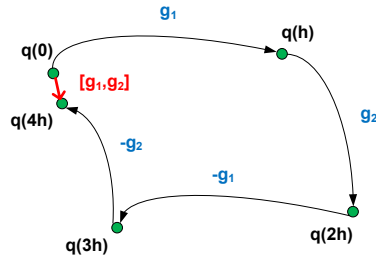
$$\begin{bmatrix} x(4h) \\ y(4h) \\ \Theta(4h) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} + h^2 \begin{bmatrix} \sin \Theta_0 \\ -\cos \Theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Iz gornjeg izraza slijedi vektor neholonomskog ograničenja:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(4h) - q(0)}{h^2} \approx \begin{bmatrix} \sin \Theta_0 \\ -\cos \Theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2. \quad (20)$$



Slika 4. a) Položaj robota u trenucima $t=h$ i $t=2h$
b) Položaj robota u trenucima $t=3h$ i $t=4h$



Slika 5. Rezultirajući pomak robota tj. gibanje u lateralnom smjeru nakon slijeda upravljačkih signala (17)

Na problemu bočnog parkiranja pokazano je da je globalni položaj MR-a s diferencijalnim pogonom neograničen unatoč neholonomskom ograničenju. Upravlјivost slijedi iz činjenice da je robot upravljačkim vektorom (17) došao u željni položaj.

3. Dinamički model mobilnog robota s diferencijalnim pogonom

Dinamički model je matematički model kojim se opisuje gibanje uz promatranje vanjskih sila koje ga prouzrokuju. Drugim riječima, dinamika uključuje brzine i energije pridružene gibanju.

S ciljem kvalitetnijeg upravljanja dobro je poznavati dinamička svojstva MR-a, odnosno najveće iznose ubrzanja/usporenja te translacijskih i rotacijskih brzina. Izgradnjom modela dinamike MR-a cilj je dobiti predikciju gibanja (iznose translacijske i rotacijske brzine) koja u što manjoj mjeri odstupaju od stvarne brzine gibanja MR-a.

Dinamičko ponašanje MR-a daje se u obliku vremenske promjene položaja MR-a u ovisnosti o momentima koji djeluju na pogonske kotače, a koji nastaju djelovanjem pogona pridruženih kotačima. Ta se povezanost može izraziti skupom diferencijalnih jednadžbi, tzv. *jednadžbi gibanja*, koje određuju odziv MR-a pod djelovanjem ulaznih momenata.

Jedan od pristupa u izvođenju dinamičkih modela sustava je Euler-Lagrangeov pristup [8] koji se zasniva na analizi energetske bilance sustava koristeći pritom dvije skalarne veličine: (i) kinetičku i (ii) potencijalnu energiju sustava. Opći oblik Euler-Lagrangeove jednadžbe u slučaju djelovanja nekonzervativnih sila jest:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) = Q_i, \quad (21)$$

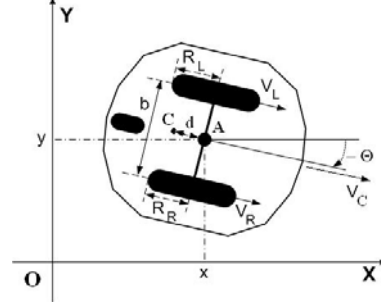
gdje je $L(q, \dot{q})$ Lagrangian sustava definiran kao razlika kinetičke $T(q, \dot{q})$ i potencijalne energije $U(q)$, a Q_i poopćena sila/moment u smjeru poopćene koordinate q_i .

Uz pretpostavku da se robot giba u ravnini (potencijalna energija je nula), potrebno je pronaći ukupnu kinetičku energiju robota. Ukupna kinetička energija je zbroj kinetičkih energija linijskog gibanja T_{LR} , rotacije robota T_{RR} i rotacije oba kotača T_{RK} :

$$\begin{aligned} T &= T_{LR} + T_{RR} + T_{RK} = \\ &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_A \omega^2 + \frac{1}{2} I_0 (\omega_R^2 + \omega_L^2), \end{aligned} \quad (22)$$

gdje je:

- m - masa robota,
- $v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}$ - linearna brzina središta mase robota (točka C na slici 6),
- I_0 - moment inercije kotača i rotora zajedno,
- I_A - moment inercije oko točke A (slika 6).



Slika 6. Varijable dinamičkog modela robota

Gibanje središta mase robota dano je jednadžbama (slika 6):

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= \dot{x}_A + d\omega \sin(\Theta) \\ \dot{y}_C &= \dot{y}_A - d\omega \cos(\Theta), \\ \omega &= \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{b}, \end{aligned} \quad (23)$$

dok je gibanje točke A opisano jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= \frac{r}{2} (\omega_R + \omega_L) \cos(\Theta), \\ \dot{y}_A &= \frac{r}{2} (\omega_R + \omega_L) \sin(\Theta), \end{aligned} \quad (24)$$

Ukupna kinetička energija MR-a prema (22) uz (23) i (24) je:

$$\begin{aligned} T &= T(\omega_R, \omega_L) = \left(\frac{mr^2}{8} + \frac{(I_A + md^2)r^2}{2b^2} + \frac{I_0}{2} \right) \omega_R^2 + \\ &+ \left(\frac{mr^2}{8} + \frac{(I_A + md^2)r^2}{2b^2} + \frac{I_0}{2} \right) \omega_L^2 + \\ &+ \left(\frac{mr^2}{4} - \frac{(I_A + md^2)r^2}{b^2} \right) \omega_R \omega_L \end{aligned} \quad (25)$$

Diferenciranjem izraza (25), prema (21) slijede *jednadžbe gibanja*:

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}_R + B \dot{\omega}_L &= M_R - K_{vir} \omega_R \\ B \dot{\omega}_R + A \dot{\omega}_L &= M_L - K_{vir} \omega_L, \end{aligned} \quad (26)$$

gdje su parametri A i B:

$$A = \left(\frac{mr^2}{4} + \frac{(I_A + md^2)r^2}{b^2} + I_0 \right), \quad (27)$$

$$B = \left(\frac{mr^2}{4} - \frac{(I_A + md^2)r^2}{b^2} \right). \quad (28)$$

M_L i M_R su pogonski momenti lijevog odnosno desnog pogonskog motora, ω_L i ω_R kutne brzine lijevog odnosno desnog pogonskih kotača, a K_{vir} je koeficijent viskoznog trenja.

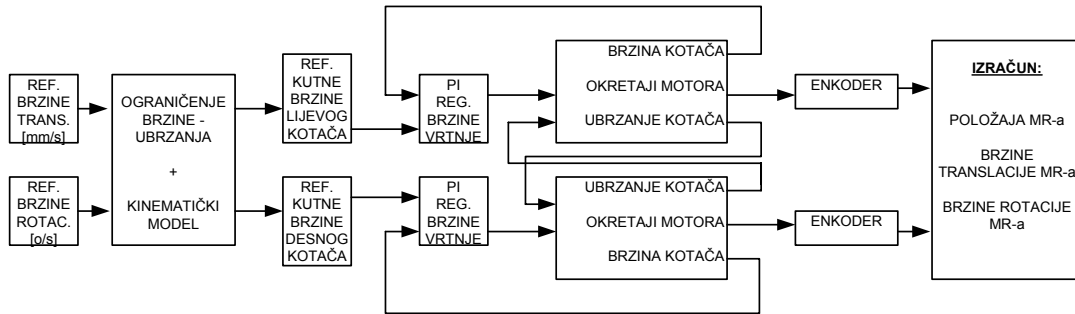
3.1. Dinamički model mobilnog robota Pioneer 3DX

Izvedeni dinamički model robota s diferencijalnim pogonom provjeren je na primjeru mobilnog robota Pioneer 3DX tvrtke MobileRobotics Inc. Model pogonskih motora zasnovan je na istosmjernom motoru s permanentnim magnetima. Kutovi zakreta kotača mjere se inkrementalnim enkoderima. Regulacija brzine vrtnje kotača ostvarena je PI regulatorom. U modelu su poštivana ograničenja stvarnog robota dana u tablici I.

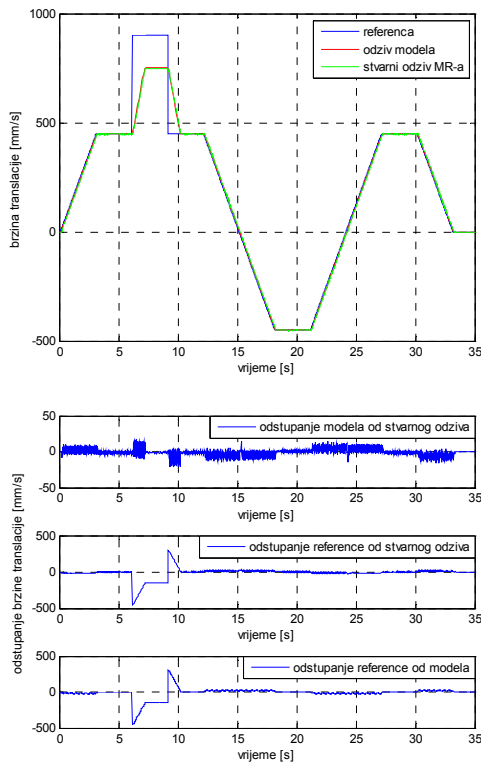
TABLICA I
OGRANIČENJA MOBILNOG ROBOTA PIONEER 3DX

	Rotacija	Translacija
Najveća brzina	100 [°/s]	750 [mm/s]
Najveće ubrzanje/usporenje	100 [°/s ²]	300 [mm/s ²]

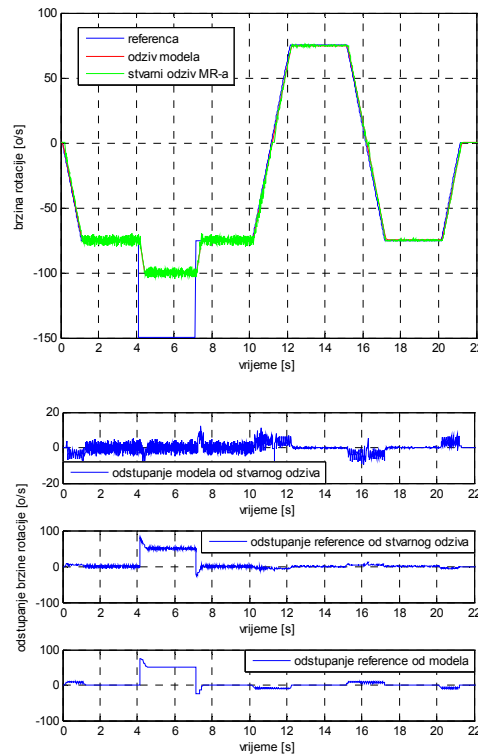
Iznosi parametara MR-a uzeti su iz [9] i [10]. Momenti tromosti u točki A i središte mase robota procijenjeni su na način da se MR "rastavio" na dijelove kojima su zatim izmjerene mase i položaji unutar MR-a. Zbog jednostavnosti je pretpostavljeno da je masa svakog pojedinog tijela skoncentrirana u geometrijskom središtu istog.



Slika 7. Blokova shema dinamičkog modela mobilnog robota



Slika 8. Brzina translacije



Slika 9. Brzina rotacije

4. Upravljanje gibanjem mobilnog robota

Sustav upravljanja mobilnim robotom sastoji se od modula za izgradnju karte prostora, modula za lokalizaciju robota na osnovi izgrađene karte prostora te modula za planiranje gibanja robota na osnovi izgrađene karte prostora, poznate lokacije robota te njegova kinematičkog i dinamičkog modela. Modul za planiranje gibanja na višoj razini planira putanju robota, a na nižoj razini upravlja gibanjem robota s ciljem slijeđenja isplanirane putanje. U nastavku se opisuje primjena energetski optimalnog upravljanja gibanjem MR-a koje osigurava dobro slijeđenje zadane putanje uz minimalni utrošak energije.

Iako teorija optimalnog upravljanja pruža univerzalni okvir za sintezu sustava upravljanja viševarijabilnim dinamičkim sustavima, ona još uvijek nije značajnije zastupljena u praktičnim primjenama, izuzev u slučajevima gdje postoje, uvjetno rečeno, analitička rješenja, kao što je slučaj upravljanja linearnim sustavima po kvadratnom kriteriju optimalnosti. Razlog tome leži u matematičkoj složenosti nužnih uvjeta optimalnosti i nužnosti primjene numeričkih metoda optimiranja. S druge strane, značajna prednost je teorije optimalnog upravljanja u odnosu na druge metode upravljanja što može izravno uzeti u obzir ograničenja varijabli stanja i upravljanja. Optimalno rješenje problema može se dobiti preko minimalne ili maksimalne vrijednosti kriterija optimalnosti kojega definira korisnik. Više o optimalnom upravljanju u [11].

Promotrimo opći matematički model objekta upravljanja u prostoru stanja

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (29)$$

gdje je vektor stanja $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, a vektor upravljanja $u(t) \in \mathfrak{R}^m$.

Opći oblik kriterija optimalnosti može se prikazati u obliku

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt. \quad (30)$$

Uvrštenjem sustava diferencijalnih jednadžbi (29) s nizom Lagrangeovih multiplikatora $\lambda(t)$ u jednadžbu (30) dobije se

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[F(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) \cdot (f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)) \right] dt. \quad (31)$$

Na funkcional (31) sada se može primijeniti klasični varijacijski račun tretirajući varijable $x(t)$, $u(t)$ i $\lambda(t)$ kao nezavisno promjenjive. Definira li se Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) \cdot f(x(t), u(t), t), \quad (32)$$

i primjeni na funkcional (31), dobije se

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t) \right] dt. \quad (33)$$

Parcijalnom integracijom drugog člana podintegralnog izraza u (33) te uzimanjem prve varijacije funkcije cilja δJ u ovisnosti o varijaciji vektora upravljanja i vektora stanja slijede nužni uvjeti optimalnog upravljanja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sa početnim i rubnim uvjetima

$$x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}. \quad (35)$$

Raspisivanjem nužnih uvjeta optimalnog upravljanja (34) dobije se sustav diferencijalnih i algebarskih jednadžbi koji se mogu riješiti ako su poznati početni i rubni uvjeti (35).

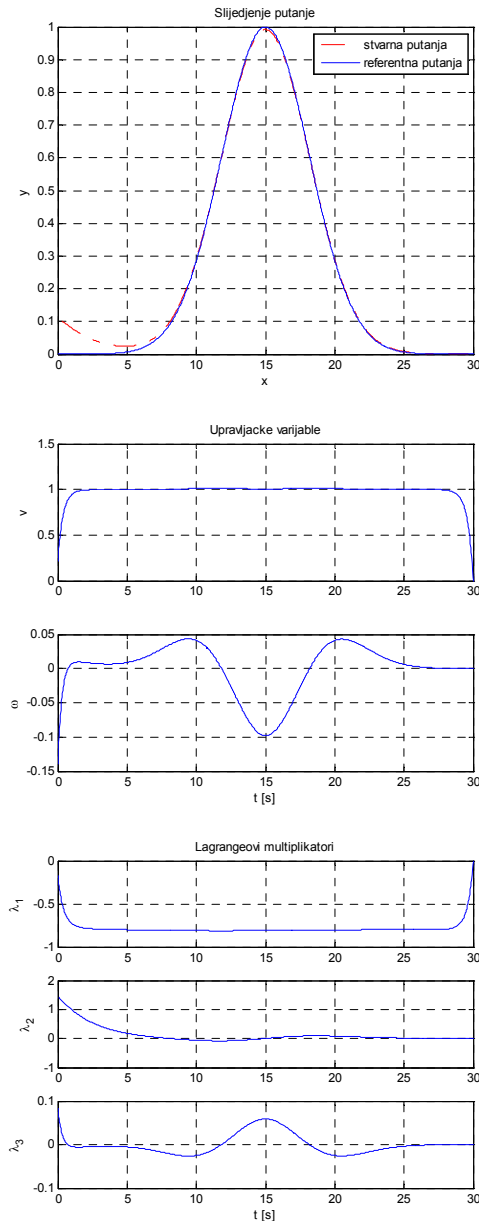
Problem slijeđenja referentne putanje MR-a opisanog jednadžbama (3)-(5) svodi se na pronalaženje upravljačkih varijabla v i ω koje minimiziraju kriterij optimalne energije izražen zbrojem kriterija minimalno utrošene energije i kriterija minimalne pogreške slijeđenja:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (k_v v^2 + k_\omega \omega^2) dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n k_i (q_i - q_{i,ref})^2 dt, \quad (36)$$

gdje su k_v i k_ω težinski koeficijenti pojedinih upravljačkih varijabli, n broj varijabla stanja, $q_{i,ref}$ referentne trajektorije pojedinih varijabla stanja i k_i težinski koeficijenti odstupanja varijabla stanja.

Za primjer je uzeta referentna trajektorija oblika:

$x_{ref}(t) = t$ i $y_{ref}(t) = e^{-\frac{1}{20}\left(x_{ref}(t) - \frac{t_f}{2}\right)^2}$ uz početne uvjete $x(0) = 0.3$, $y(0) = 0.1$ i $\Theta(0) = 0$ odnosno rubne uvjete $\lambda_i(t_f) = 0$. Rezultati simulacije su prikazani na slici 10.



Slika 10. Simulacijski rezultati slijeđenja putanje

5. Zaključak i budući rad

Neholonovski mehanički sustavi ne mogu se kretati u proizvoljnim smjerovima u svome konfiguracijskom prostoru. Neostvarljivi smjerovi gibanja mogu se opisati pomoću Liejevih zagrada. Predstavljeni dinamički model Pioneer 3DX robota može poslužiti kao početna baza za provjeru algoritama prije implementacije istog na stvarnom robotu. Predloženi algoritam upravljanja gibanjem robota zasnovan na kriteriju optimalnosti osigurava dobro slijeđenje zadane putanje uz minimalni utrošak energije.

Budući rad bit će posvećen istraživanju značajki složenijih neholonomskih sustava, kao što je primjerice vozilo s prikolicama te istraživanju metoda upravljanja takvim sustavima.

Literatura

- [1] A. D. Luca, G. Oriolo, M. Vendittelli, *Control of Wheeled Mobile Robots: An Experimental Overview*, in: S. Nicosia, B. Siciliano, A. Bicchi, p: Valigi, (Eds) *RAMSETE – Articulated and Mobile Robotics for Services and Technologies*, 3rd ed. Springer-Verlag, 2001.
- [2] M. Brezak, I. Petrović, N. Perić, "Experimental Comparison of Trajectory Tracking Algorithms for Nonholonomic Mobile Robots," *Proceedings of 35th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Porto, Portugal, 2009.
- [3] M. Popescu, A. Dumitrache, "On the Optimal Control of Affine Nonlinear Systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2005, no. 4, pp. 465-475, 2005.
- [4] C. H. Kim, B. K. Kim, "Minimum-Energy Motion Planning for Differential-Driven Wheeled Mobile Robots," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 49, Issue 4, pp. 367-383, August 2007.
- [5] S. M. LaValle, *Planning Algorithms*, Cambridge University Press, 2006.
- [6] S. M. LaValle, *Chapter 8, Motion Strategy: Nonholonomic System Theory*. [Internet]. Dostupno: www.cs.rpi.edu/~sakella/rmp01/handouts/chap8.pdf
- [7] P. Isaiah, "Controlled Parking," *IEEE Control Systems Magazine*, June 2009.
- [8] J. Velagić, *Lekcija 2: Lokomocija mobilnih robota*. [Internet]. Dostupno: people.etf.unsa.ba/~jvelagic/loras/dok/Lekcijamob2.pdf
- [9] [Internet]. Dostupno: <http://www.activrobots.com/ROBOTS/p2dx.html>
- [10] [Internet]. Dostupno: www.allmotion.se/files/pdf/1707.pdf
- [11] J. Kasač, *Vođenje tehničkih sustava – materijali za predavanja i vježbe*. [Internet]. Dostupno: <http://zmo.fsb.hr/katedra/download/materijali/334.pdf>